

# 不同小波函数对灰色模型精度影响分析

时召军, 朱 梅, 周 迪, 郑佳重

(安徽农业大学 工学院, 安徽 合肥 230036)

**摘 要:**针对小波灰色模型在水文序列预测中面临的小波函数的选择问题,采用安庆站 1956~2011 年实测降雨量作为算例,以传统的灰色模型预测值作为参考,考虑了 Haar、Db、Smy、Coif、Bior、Rbio、Dmey 等 7 种小波基函数,通过方差和纳什系数作为模型预测评价指标,对不同小波灰色模型精度影响进行了分析。结果表明:不是所有小波函数与灰色模型耦合都能提高模型的精度;安庆站 1956~2011 年实测降雨量水文序列来说,db1 小波函数对模型精度提高的效果最明显。

**关键词:**小波分析;灰色模型;精度

中图分类号:P338

文献标识码:A

文章编号:1000-0852(2015)03-0049-04

## 1 引言

灰色系统理论<sup>[1]</sup>是一种研究少数据、贫信息不确定性问题的新方法。自 1982 年由中国学者邓聚龙教授创立以来,已经在许多领域得到了成功的应用<sup>[1-2]</sup>。20 世纪 80 年代,随着小波理论的兴起与发展,小波函数与灰色模型的耦合也被人们证明有较强的预测能力<sup>[3]</sup>。

目前一些学者在小波分析技术中小波函数的选择上做了大量工作,取得成果颇丰。桑燕芳等<sup>[4]</sup>应用蒙特卡罗方法,通过黄河利津站和浙江白溪流域的实测水文序列,探讨小波分析中影响小波函数选择的因素,进而建立合理选择小波函数的依据和方法。Muhammad Shoaib 等<sup>[5]</sup>应用方差等指标分析法对不同小波对人工神经网络模型预测径流的影响做了详细的分析研究,得出不同小波对提高小波人工网络径流模型的精度的不同影响。

可以看出,在应用小波分析技术进行水文序列模拟预测过程中,不同的研究选用的小波函数是不同的<sup>[4]</sup>。对于小波灰色模型预测水文时间序列时,究竟应如何选择相应合理的小波函数类型,目前还未有人做过系统的分析研究。为此,本文将信号离散小波变换中常用的 7 个小波系共 54 个小波函数作为小波函数选择的范围,利用安庆站 1956~2011 年的实测年降雨资料分析不同小波函数对小波灰色模型精度的影响。

## 2 研究方法与思路

### 2.1 小波总体

信号离散小波变换分析的过程中,常用的有 7 个小波系中的 54 个小波(表 1)。每个小波都有自己的定义、小波函数表达式、尺度函数、消失矩和滤波器长度等,详见文献<sup>[6]</sup>。

### 2.2 小波灰色模型

小波函数指的是具有振荡特性并且能够迅速衰减的函数:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

小波函数的伸缩和平移构成了一簇小波函数:

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) (a > 0, b \in R) \quad (2)$$

式中: $\Psi_{a,b}(t)$ 为子小波; $a$ 为尺度因子,反映了小波的周期长度; $b$ 为平移因子,反映了在时间上的平移。

灰色模型是把一切随机过程看作是一定范围内变化的与时间有关的灰色过程,对灰色量不是寻找统计规律和大样本研究,而是用数据生成的方法,将杂乱无章的原始数据整理成规律性较强的数据作研究,建立生成序列与时间的关系函数模型,即灰色模型(gray model),从而推导出未知信息(预测数据)的过

收稿日期:2014-11-08

作者简介:时召军(1987-),男,安徽寿县人,硕士研究生,主要从事水文水资源及农田水利研究。E-mail:shizj88@qq.com

通讯作者:朱梅(1977-),女,安徽怀远人,副教授,硕士生导师,主要从事水文水资源及农田水利研究。E-mail:zhumei@ahau.edu.cn

表1 离散小波变换常用小波函数统计  
Table 1 The statistics of the discrete wavelets

小波系	小波简写	小波函数				
Haar	haar					
Daubechies	db	db1	db2	db3	db4	db5
		db6	db7	db8	db9	db10
Symlets	sym	sym2	sym3	sym4	sym5	sym6
		sym7	sym8			
Coiflets	coif	coif1	coif2	coif3	coif4	coif5
BiorSplines	bior	bior1.1	bior1.3	bior1.5	bior2.2	bior2.4
		bior2.6	bior2.8	bior3.1	bior3.3	bior3.5
		bior3.7	bior3.9	bior4.4	bior5.5	bior6.8
Dmeyer	dmey					
ReverseBior	rbio	rbio1.1	rbio1.3	rbio1.5	rbio2.2	rbio2.4
		rbio2.6	rbio2.8	rbio3.1	rbio3.3	rbio3.5
		rbio3.7	rbio3.9	rbio4.4	rbio5.5	rbio6.8

程,称为灰色预测方法。本文探讨不同小波函数对GM(1,1)模型在水文预测中的精度影响。

灰色模型:设  $x^0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(k), \dots, x_0(n)\}$  为原始数据列,对  $x_0$  进行一次累加得生成数列  $x_1 = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(k), \dots, x_1(n)\}$ , 其中  $x_1(k), k=1, 2, \dots, n$ 。

对生成数列  $x_1$  有:

$$\frac{dx^1(t)}{dt} + ax^1(t) = u, t \in [0, \infty] \quad (3)$$

式(3)的解为:

$$\hat{x}(t) = [x_0(1) - \frac{u}{a}]e^{-a(t-1)} + \frac{u}{a} \quad (4)$$

式中:  $k$  为自变量序列;  $a$  为发展系数;  $u$  为控制系数。

小波灰色模型建立的基本思想是通过小波变换将数据列分解,而得到多个不同的序列,然后利用灰色模型对这些子序列进行预测,再通过重构得出预测的变形监测数据序列<sup>[3]</sup>。其流程图如图1所示。

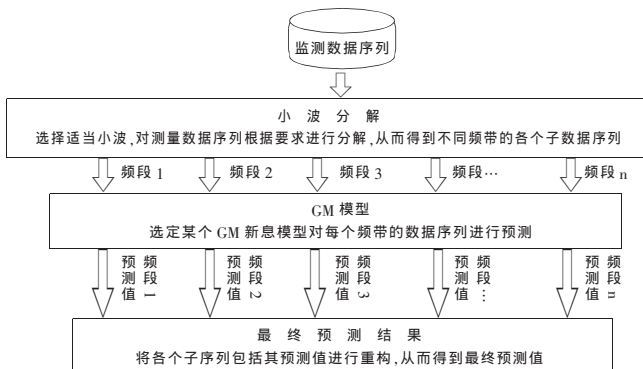


图1 灰色小波模型预测流程图

Fig.1 The forecast flow of the wavelet based gray model

## 2.3 研究思路

利用小波分析具有的多分辨能力,可以分解构成曲线信号的高频部分和低频部分,因此可以获得原始信号的趋势变化和局部细节特性<sup>[7]</sup>。本研究首先利用传统的灰色模型对原始序列进行预测,得到预测值作为参考;然后采用不同小波灰色模型对原始序列进行预测,根据相关指标进行分析,得出不同小波对灰色模型影响的优劣排序,找出预测值最好的小波。需要指出的是,本研究考虑满足分析需要和减少计算负担分解的层数采用3层。

评价灰色模型精度有多种统计指标,本次研究采用了较为常用的方差(RMSE)和纳什系数(NSE)作为评价模型的指标。具体公式如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (Q_o - Q_m)^2} \quad (5)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Q_o - Q_m)^2}{\sum_{i=1}^N (Q_o - \bar{Q}_o)^2} \quad (6)$$

式中:  $Q_o$  为观测值;  $Q_m$  为模拟值;  $\bar{Q}_o$  为观测值的总平均值。

方差是一个0到 $+\infty$ 的指标,是用来评价模型输出的好坏的指标之一。方差越接近0,模型质量越好,方差越大,模型质量越差;纳什系数取值为 $-\infty$ 至1,  $NSE$ 接近1,表示模型质量好,模型可信度高;  $NSE$ 接近0,表示模拟结果接近观测值的平均值水平,即总体结果可信,但过程模拟误差大;  $NSE$ 远远小于0,则模型是不可信的。

## 3 结果分析

对安庆站1956~2011年的实测年降雨资料先用传统的灰色模型进行模拟预测。经过计算,得出传统灰色模型预测值方差和纳什系数结果见表2。

表2 传统的灰色模型预测值方差和纳什系数

Table 2 The RMSE and NSE of the traditional gray models

指标	方差	纳什系数
数值	41.83	0.95

再运用不同小波灰色模型进行模拟预测,得出不同小波灰色模型评价指标结果见表3、表4。

通过以上计算可以得到以下结论:

(1)灰色模型预测值方差为41.83,纳什系数为0.95,表明了灰色模型在水文序列预测方面的优越性。

表3 不同小波灰色模型预测值方差

Table 3 The RMSEs of the different wavelet based gray models

小波	方差	小波	方差	小波	方差	小波	方差
db1	38.28	sym6	75.88	bior2.6	121.95	rbio2.2	423.73
db2	40.45	sym7	41.77	bior2.8	96.98	rbio2.4	304.20
db3	40.73	sym8	41.71	bior3.1	159.83	rbio2.6	304.20
db4	40.53	coif1	182.10	bior3.3	117.30	rbio2.8	224.63
db5	40.45	coif2	74.90	bior3.5	81.71	rbio3.1	752.37
db6	40.88	coif3	41.33	bior3.7	88.45	rbio3.7	458.29
db7	41.06	coif4	42.23	bior3.9	63.63	rbio3.9	157.86
db8	41.58	coif5	41.89	bior4.4	182.13	rbio4.4	220.57
db9	41.33	bior1.1	182.10	bior5.5	240.15	rbio5.5	137.53
sym2	221.24	bior1.3	279.07	bior6.8	127.41	rbio6.8	161.12
sym3	190.96	bior1.5	206.12	rbio1.1	337.16	dmey	43.32
sym4	163.62	bior2.2	189.23	rbio1.3	285.38		
sym5	134.97	bior2.4	131.61	rbio1.5	215.36		

(注:由于 haar 小波和 db1 小波是同一种小波此处不重复列举,下同)

表4 不同小波灰色模型预测值纳什系数

Table 4 The NSEs of the different wavelet based gray models

小波	纳什系数	小波	纳什系数	小波	纳什系数	小波	纳什系数
db1	0.96	sym6	0.83	bior2.6	0.57	rbio2.2	-4.17
db2	0.95	sym7	0.95	bior2.8	0.73	rbio2.4	-1.83
db3	0.95	sym8	0.95	bior3.1	0.26	rbio2.6	-1.66
db4	0.95	coif1	0.05	bior3.3	0.60	rbio2.8	-0.45
db5	0.95	coif2	0.84	bior3.5	0.81	rbio3.1	-15.30
db6	0.95	coif3	0.95	bior3.7	0.77	rbio3.7	-4.10
db7	0.95	coif4	0.95	bior3.9	0.88	rbio3.9	0.28
db8	0.95	coif5	0.95	bior4.4	0.04	rbio4.4	-0.40
db9	0.95	bior1.1	-2.16	bior5.5	-0.66	rbio5.5	0.46
sym2	-0.41	bior1.3	-1.24	bior6.8	0.53	rbio6.8	0.25
sym3	-0.05	bior1.5	-0.22	rbio1.1	-2.27	dmey	0.95
sym4	0.23	bior2.2	-0.03	rbio1.3	-1.34		
sym5	0.48	bior2.4	0.50	rbio1.5	-0.34		

(2)在利用小波分析技术与灰色模型进行预测时,选取的小波类型将对预测的结果精度产生影响,合适的小波将提高灰色模型的预测精度,反之将降低预测精度。通过分析计算,db 系列的小波、sym 系列的小波中的 sym7 和 sym8、coif 系列中的 coif3 小波提高模型精度;其余小波函数不仅没有提高模型的精度,反而对模型精度产生一定的负面影响。

(3)对精度产生正面影响的小波函数中,db1 小波对模型精度提高的效果最明显,方差由 41.38 减小到 38.28;纳什系数由 0.95 上升到 0.96。同时可以看出 rbio 系列小波对模型精度负面影响最大,其中 rbio3.1

小波对模型的负面影响尤为突出。

4 结论与讨论

通过前文论述,灰色模型的精度对小波函数的选择十分敏感。选取不同的小波函数进行耦合将对模型产生不同的影响,有正面的影响也有负面的影响。这使得在使用小波灰色模型对水文序列进行预测时,小波函数的选择十分重要。就安庆站 1956~2011 年实测降雨量水文序列来说,db1 小波对模型精度提高的效果最明显。不同小波函数对模型精度产生这么大的差异的原因可能有:对模型有负面影响的小波函数,没

有将同一趋势变化和局部细节特性的序列分解到一起,产生建模误差;小波分解之后的序列不适合使用灰色模型来预测。

参考文献:

- [1] 王开章,刘福胜,孙鸣. 灰色模型在大武水源地水质预测中的应用王开章[J]. 山东农业大学学报(自然科学版), 2002,33(1):66-71. (WANG Kaizhang, LIU Fusheng, SUN Ming. The application of grey model in Dawu water quality predication water resource site[J]. Journal of Shandong Agricultural University(Natural Science), 2002,33(1):66-71. (in Chinese))
- [2] 樊春玲,高峰,孙四通,等. 基于灰色模型的混合建模预测方法及其应用[J]. 中国惯性技术学报, 2008,16(4):475-479. (FAN Chunling, GAO Feng, SUN Sitong, et al. A novel grey-based hybrid modeling method and its application[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008,16(4):475-479. (in Chinese))
- [3] 王秀萍,吴清海,赵宝锋. 灰色模型联合小波变换进行变形预测的研究[J]. 工程勘察, 2006,(12):66-69. (WANG Xiuping, WU Qinghai, ZHAO Baofeng. The analytical research of wavelet transform and

gray model or deformation forecast [J]. Journal of Geotechnical Investigation & Surveying, 2006,(12):66-69. (in Chinese))

- [4] 桑燕芳,王栋. 水文序列小波分析中小波函数选择方法[J]. 水利学报, 2008,39(12):295-301. (SANG Yanfang, WANG Dong. Wavelets selection method in hydrologic series wavelet analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008,39(12):295-301. (in Chinese))
- [5] Muhammad Shoaib, Asaad Y. Shamseldin, Bruce W. Melville. Comparative study of different wavelet based neural network models for rainfall-runoff modeling [J]. Journal of Hydrology, 2014,55(4):47-58.
- [6] 王文圣,丁晶,李跃清. 水文小波分析[M]. 北京: 化学工业出版社, 2005. (WANG Wensheng, DING Jing, LI Yueqing. Hydrology and Wavelet Analysis [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2005. (in Chinese))
- [7] 王文圣,袁鹏,丁晶. 小波分析及其在日流量过程随机模拟中的应用[J]. 水利学报, 2000,31(11):23-30. (WANG Wensheng, YUAN Peng, DING Jing. Wavelet analysis and its application to stochastic simulation of daily flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000,31(11):23-30. (in Chinese))

## Influence of Different Wavelet Functions on Accuracy of Gray Model

SHI Zhaojun, ZHU Mei, ZHOU Di, ZHENG Jiazhong

(College of Engineering, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

**Abstract:** In light of the problem that how to select the wavelet function facing the prediction of hydrological series by the wavelet based gray model, this paper analyzed the impacts on the accuracy of different wavelet based gray models by taking the measured rainfall of the Anqing Station as an example and using the predicted values of the traditional gray model as a reference. It also took the seven kinds of wavelet functions including Haar, Db, Smy, Coif, Bior, Rbio and Dmey into consideration and made the Root Mean Squared Error (RMSE) and the Nash - Sutcliffe Efficiency (NSE) as the evaluation indexes to the models. The result shows that different wavelet functions have both positive and negative effects on the accuracy of models, among which db1 wavelet function is the most effective one to improve the accuracy of the model based on Anqing's rainfall series..

**Key words:** wavelet analysis; gray model; accuracy

(上接第 13 页)

## Study on Theis-well Function Computation Methods and Auto-calibration of Well Model

CHENG Xianyun<sup>1</sup>, ZHENG Fandong<sup>2</sup>, YANG Hao<sup>2</sup>, CAO Daling<sup>1</sup>, YANG Yong<sup>2</sup>

(1. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China;

2. Beijing Institute of Water Science and Technology Research, Beijing 100044, China)

**Abstract:** Summarizing the various numerical methods for computing the Thies well-function, the advantages and disadvantages of each method were analyzed and compared, and their impacts on final model parameter estimation were concluded, a new simplified alternative way was proposed too. Two real examples were adopted to examine the performance of both well-function computation and model auto-calibration. The study results show that: (1) The wide-used series expansion method for calculation of Thies well-function should be thought for use with much caution; (2) Universal optimization platform 1stOpt can be considered as an advance tool for parameter auto-calibration of Theis well-model, and the platform could also be widely applied on other hydrological models.

**Key words:** Theis well model; Theis well-function; parameter optimization; 1stOpt