

Theis 井函数计算方法及井模型参数优化计算研究

程先云¹, 郑凡东², 杨 浩², 曹大岭¹, 杨 勇²

(1. 中国水利水电科学研究院, 北京 100038; 2. 北京市水科学技术研究院, 北京 100044)

摘 要:归纳总结了 Theis 井模型中井函数的不同数值计算方法, 探讨、分析和比较了各方法的利弊、优缺点及对模型最终参数计算的影响, 提出了新的简易计算方法; 以经典实际案例为对象, 对比研究了优化软件平台在 Thies 井模型参数计算中的实际应用效果; 计算结果表明: (1) Thies 井模型参数估算应慎用广为采纳的级数展开井函数计算方式; (2) 1stOpt 通用优化计算平台可很好处理 Theis 井模型参数优化计算问题, 并可广泛用于其它水文模型参数求解。

关键词: Theis 井模型; Theis 井函数; 参数优化; 1stOpt

中图分类号: P345

文献标识码: A

文章编号: 1000-0852(2015)03-0008-06

1 背景

Thies 井模型是水文地质和地下水研究领域中的重要模型方法之一, 主要用于承压含水层抽水试验资料建模, 并进而确定水文地质参数如渗透系数 K 和导水系数 T 等, 其在国内外都有广泛的应用。该模型的应用有两个要点, 一是如何计算模型中的井函数, 二是用何种方法计算出模型参数。

关于第一点, 使用最广的方式是级数展开近似求解, 该方法简单、易于理解和实现, 但误差大的缺点也显而易见, 虽然国内外还有不少其它替代计算方式, 但都缺乏较为全面和系统的对比介绍。第二点是模型参数估算, 虽然自行编程亦可实现, 但由于涉及到优化和数值算法以及编程技巧, 对一般水文工作者而言有相当难度, 而随着当今计算机软硬件的快速发展, 利用成熟优化建模计算平台不失为一可用之道, 这类平台林林总总、性能各异, 有的优化能力强但无内置井函数计算函数, 如 Lingo、GAMS 等; 有的井函数为内置函数, 但优化能力却相对较弱, 如 Matlab 等; 而 1stOpt 却可很好满足两者的要求, 使用上也非常简单, 应用效果已被国内外各行业广大研究者认可。本研究

即采用该平台进行模型参数优化计算。

2 Theis 井模型

定流量非稳定流承压水完整井 Thies 井模型可以表示为:

$$S = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot W(u) \quad (1)$$

其中: $W(u) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{x} dx$, $u = \frac{r^2 \cdot u_s}{4 \cdot T \cdot t}$

式中: S 为实测降深(m); Q 为抽水流量(m^3/d); T 为承压含水层导水系数(m^2/d); $W(u)$ 为 Theis 井函数; u_s 为承压含水层贮水系数; t 为抽水时间(d); r 为观测孔到抽水井的距离(m)。

根据抽水试验资料和模型公式(1)确定模型参数 T 和 u_s , 难点之一是公式中的井函数 $W(u)$ 无解析解, 只能通过数值计算方法近似求解。关于井函数 $W(u)$, 在数学上也叫指数积分函数 (ExpInt), 在水文地质中则常称为 Theis 井函数或井函数, 其数值求解方式国内外学者已进行了众多的探讨和研究, 除了传统的误差较大且实施繁琐的配线法和 Jacob 直线图解法外, 其它主要可归纳总结如下。

收稿日期: 2014-04-26

基金项目: 北京市西郊地区地下水战略储备关键技术与示范(Z141100003614060); 水利部公益性行业科研专项经费项目“山洪灾害监测预警系统标准化研究”(201201058)

作者简介: 程先云 (1965-), 男, 四川宜宾人, 工学博士, 高级工程师, 主要从事水信息研究。E-mail: xycheng@iwhr.com

2.1 级数展开

由于 Theis 井函数为指数积分式, 数学上无法直接得出其积分表达式, 为便于数值计算, 通常将其以无穷级数形式展开, 如下式:

$$W_{(u)} = -\gamma - \ln(u) - \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n \cdot u^n}{n \cdot n!} \quad (2)$$

式中: $\gamma=0.5772156649015329$, 是欧拉常数; N 理论上趋近于无穷。

实际应用中, 可以根据不同的精度需要选取级数展开项 N 。国内绝大多数研究者都是采用的这种方法, 级数项 N 一般都取 3~5, 如文献[1-4]等。然而该近似数值计算方法会因为级数项的取舍而导致实际应用中产生较大误差问题, 如图 1 为级数项 N 分别取 5~11 时的 $u-W_{(u)}$ 图, 可以很明显地看出当 u 大于 2 时 $W_{(u)}$ 值即处于震荡发散不稳定状态, N 值越小误差越大, 其后果是模型参数最终求解结果出现较大误差。

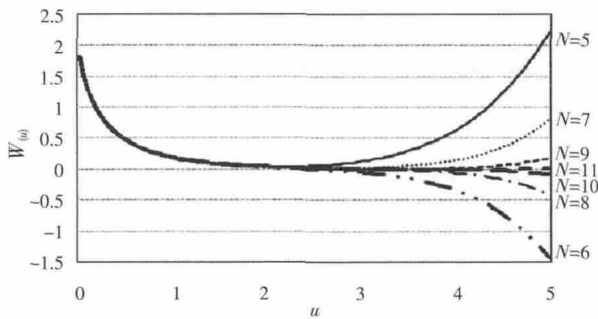


图 1 级数展开方式的井函数计算示意图
Fig.1 The well function with various series expansion

2.2 Barry 方法^[5]

Barry 于 2000 年提出了一种估计井函数 $W_{(u)}$ 的方法, 概要如下:

$$W_{(u)} = \frac{\exp(-u) \ln \left(1 + \frac{G}{u} - \frac{1-G}{(h+b \cdot u)^2} \right)}{G + (1-G) \cdot \exp \left(\frac{-u}{1-G} \right)} \quad (3)$$

其中: $G = \exp(-\gamma)$, $\gamma = 0.5772156649015328606$;

$$b = \sqrt{\frac{2 \cdot (1-G)}{G \cdot (2-G)}}, h = \frac{(1-G) \cdot (G^2 - 6 \cdot G + 12)}{3 \cdot G \cdot (2-G)^2 \cdot b}$$

$$h = \frac{1}{1+u \cdot \sqrt{u}} + \frac{h \cdot q}{1+q}, q = \frac{20}{47} \cdot u^{\sqrt{\frac{31}{26}}}$$

2.3 Srivastava 方法^[6]

Srivastava 于 1998 年提出的方法如公式(4)示, 其系数如表 1。

$$W_{(u)} = \begin{cases} -\ln(u) + \sum_{i=0}^5 a_i \cdot u^i & u \leq 1 \\ \frac{1}{u \cdot \exp(u)} \cdot \frac{\sum_{i=0}^4 b_i \cdot u^i}{\sum_{i=0}^4 c_i \cdot u^i} & u > 1 \end{cases} \quad (4)$$

表 1 Srivastava 方法系数表
Table1 Coefficient of Srivastava method

序号	0	1	2	3	4	5
a	-0.57722	0.99999	-0.24991	0.05519	-0.00976	0.00108
b	0.2677	8.63476	18.05902	8.57333	1	
c	3.95850	21.09965	25.63296	9.57332	1	

2.4 契比雪夫(Chebyshev)有理式逼近

契比雪夫有理式逼近可用于高精度计算复杂函数的数值近似解。对于井函数 $W_{(u)}$, Cody^[7]给出的方法如下:

$$W_{(u)} = \begin{cases} -\ln(u) + \frac{\sum_{i=0}^{n_1} p_{1,i} \cdot u^i}{\sum_{i=0}^{n_1} q_{1,i} \cdot u^i} & 0 < u \leq 1 \\ \exp(-u) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n_2} p_{2,i} \cdot u^i}{\sum_{i=0}^{n_2} q_{2,i} \cdot u^i} & 1 < u \leq 4 \\ \frac{\exp(-u)}{u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n_3} p_{3,i} \cdot u^i}{\sum_{i=0}^{n_3} q_{3,i} \cdot u^i} \right) & u > 4 \end{cases} \quad (5)$$

式中: p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 和 q_3 为常数项系数, 具体值可参考文献[7]。

2.5 拟合方程替代

巩彦文^[8]等提出了利用拟合方程来近似计算井函数 $W_{(u)}$ 的方法, 其替代公式如下:

$$W_{(u)} = 18.109 \cdot u^{0.256} - 31.310 \cdot u^{0.16} + 13.482 \quad (6)$$

如图 2 示, 拟合式(6)当 u 大于 2 时 $W_{(u)}$ 出现明显的误差。

笔者基于最小二乘原理, 得出如下井函数 $W_{(u)}$ 替代公式, 具体系数见表 2, 效果图见图 2, 和高精度数值解几乎完全重合:

$$W_{(u)} = \begin{cases} b_1 + b_2 \cdot u^{b_3} + b_4 \cdot \ln(u) + b_5 \cdot \exp(b_6 \cdot u) & u \leq 1 \\ p_1 \cdot \exp(1 + p_2 \cdot u^{p_3} + p_4 \cdot u^{p_5} + p_6 \cdot \ln(u)) + p_7 \cdot \exp(u \cdot p_8) & u > 1 \end{cases} \quad (7)$$

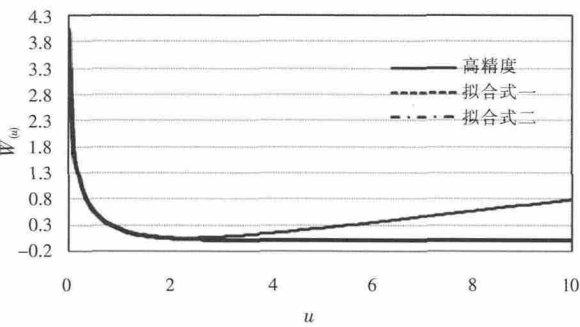


图 2 拟合替代公式井函数计算示意图
Fig.2 The regression function for well function

表2 拟合替代公式 (7) 系数表		
Table2 The coefficient of regression function		
序号	<i>b</i>	<i>p</i>
1	0.645517319421736	0.564514611673438
2	0.220523369822589	-0.189854016260644
3	0.99922210236199	1.29172191628888
4	-1.00000014554241	-1.73604166880858
5	-1.22273508901879	0.693543466102803
6	-0.637030075359308	-0.234855517244515
7		-0.0336932239452858
8		-2.06712062991927

2.6 不同方法精度比较

当今市面上的一些著名数学数值计算软件包如 Matlab、1stOpt 等已内置了指数积分函数 $W(u)$ ，可得到

误差小于 $1E-10$ 的高精度数值解，以此结果作为参照目标值检验上述不同井函数计算方法的精度，见表3。

表3 不同方法井函数计算精度对比
Table3 Accurate comparsion of various methods for well function

<i>u</i>		1E-5	0.01	1	10	20
<i>W(u)</i>	高精度	10.9357198	4.03792958	0.21938393	4.156969E-6	9.835525E-11
	级数 <i>N</i> =5	10.9357195	4.03792924	0.21958956	100.17575	4027.53816
	展开 <i>N</i> =30	10.9357195	4.03792924	0.21938360	-2.624277E-5	-52247.83580
	Barry	10.9357198	4.03783522	0.21927152	4.156478E-6	9.835443E-11
	切比雪夫	10.9357198	4.03792958	0.21938393	4.156969E-6	9.835525E-11
	Srivastava	10.9357198	4.03792515	0.21938351	4.156969E-6	9.835526E-11
	拟合 式(6)	9.46056389	4.03787773	0.221	0.7894027	1.81079246
	方程 式(7)	10.9357198	4.03793067	0.21938407	4.112166E-6	8.088367E-11

由表 3 可见，随着 u 值的增加级数展开法所得结果误差快速增大，当 u 大于 5 时其结果已无法使用，即使级数取足够大的 30；拟合方程式(6)整体上误差都相对较大；其它几种方法则均可满足实际计算需求，其精度从高到低为切比雪夫、Srivastava、拟合式(7)和 Barry 法。

3 Theis 井模型参数计算

Theis 井模型(公式 1)无解析解，由于其公式的复杂性和非线性，根据抽水试验所获数据反求参数承压含水层导水系数 T 和承压含水层贮水系数 u_s 相对比较困难。传统的方法主要有配线法和 Jacob 直线图解法，但这两种方法要么人为误差较大，要么适用条件苛刻，总体上应用繁琐精度低。

采用各类最优化方法进行参数估算是当下最流行也最为有效的方法。从理论上而言，仿生人工智能最优算法具有全局寻优能力，可以很好处理各类非线性优

化参数寻优问题。对于井模型参数优化估算一般有两种途径，一种是自己编程实现，如金菊良^[9]采用加速遗传算法，丁东^[4]等采用粒子群算法，张全兴^[10]等应用差分进化算法；另一种是采用成熟通用优化软件，如刘建^[3]等使用 Lingo 软件包，李林子^[11]等使用 Matlab 软件。两种途径各有优缺点，自己编程实现，除了优化算法的实现需要一定的相关优化知识及编程技能外，Thies 井函数的数值计算方法也甚为重要，如前述文献[4]、[9]、[10]等均采用级数展开模式，而该模式的误差上节已有论述；采用商业优化软件，虽然优化算法部分不用用户自己考虑，但除去价格因素外也会遇到其它问题，如 Lingo 有很强的全局优化能力，但井函数(指数积分函数)却不是其内置缺省函数，需用户自己实现，而绝大多数用户仍采用级数展开模式^[3]，Matlab 虽然已将井函数定为内置函数可直接调用，但 Matlab 几个常用的优化函数均为局部最优函数，对初值依赖严重，不易求得全局最优解^[11]，此外，Matlab 也需要一定

的编程基础。

正确的井函数计算方法加上具有全局优化能力的优化算法或工具是获取 Theis 井模型参数的有效途径。本研究使用的 1stOpt 是作者参与研发,已在国内外各行业得到广泛应用和高度认可的通用数值优化计算平台,该平台具有简单易用和强大全局优化能力两大突出特点,而且井函数也是其内置缺省函数,精度高,直接调用,可有效帮助解决 Theis 井模型参数识别问题。

优化模型:

$$\min. f=\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{L_m} (S_{mi}-\bar{S}_{mi})^2 \tag{8}$$

式中: M 为测井数; L_m 为第 m 个测井站数据; S_{mi} 和 $\bar{S}_{mi}$ 分别为 m 测井 i 时刻实测和计算降深,见公式(1)。该

优化模型有两个决策变量导水系数 T 和承压含水层贮水系数 u_s 。

4 案例应用和分析

通过两个实际抽水试验案例,探讨不同井函数计算方式及不同数据处理和取舍对模型参数的影响。

4.1 井函数计算方法的影响

该案例参考自文献[12]的 1978 版本,详细数据见表 4,单一测孔,抽水流量为 22.60m³/h,观测孔距抽水井 117.85m。

井函数分别采用前述 5 种方法 7 种模式进行计算;模型参数优化计算采用 1stOpt 平台,代码见表 5。所得参数及水位降深结果分别见表 6 和图 3。

表4 案例1抽水试验数据
Table4 The experiment data of case 1

序 号	累计时 间/min	水位降 深/m	序 号	累计时 间/min	水位降 深/m	序 号	累计时 间/min	水位降 深/m
1	1	0	14	40	0.029	27	600	0.755
2	2	0	15	50	0.038	28	720	0.88
3	3	0	16	60	0.05	29	900	1.0
4	4	0	17	80	0.093	30	1200	1.15
5	5	0	18	100	0.13	31	1500	1.22
6	6	0	19	120	0.165	32	1800	1.32
7	8	0.002	20	150	0.22	33	2100	1.39
8	10	0.005	21	180	0.27	34	2400	1.45
9	12	0.006	22	210	0.33	35	3000	1.51
10	15	0.007	23	240	0.37	36	3600	1.67
11	20	0.008	24	300	0.455	37	4200	1.71
12	25	0.011	25	360	0.53	38	4800	1.72
13	30	0.02	26	480	0.655	39	5820	1.73

表6 不同井函数计算方法所得参数值
Table6 The parameters obtained with various methods

方法 编号	井函数 计算方法	参数值		目标函 数值 f	目标函数 相对误差 /%
		导水系数 $T/\text{m}^2 \cdot \text{d}^{-1}$	贮水系数 u_s		
1	高精度	84.81798	1.4552E-3	0.039385	
2	配线法 ^[12]	80.16	1.54E-3	0.054	37.1071
3	级数 $N=5$	203.29209	1.9179E-4	2.850727	7138.0529
4	展开 $N=30$	152.98235	4.1951E-4	1.386987	3421.5873
5	Barry	84.80396	1.4552E-3	0.039556	0.4331
6	切比雪夫	84.81798	1.4552E-3	0.039385	0
7	Srivastava	84.81810	1.4552E-3	0.039385	0.00134
8	拟合式(6)	139.78266	5.4934E-4	1.366611	3369.8541
9	拟合式(7)	84.8180513	1.4552E-3	0.039386	0.00095

表5 案例一1stOpt计算代码
Table5 1st Opt code of case 1

Constant Q=22.6*24, r=117.85;	
ConstStr u=r^2*c/(4*k*t/60/24);	
ConstStr W=ExpInt(u);	
Variable t,S;	
Function S=Q/(4*pi*k)*W;	
Data;	
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
8	0.002
10	0.005
.....	

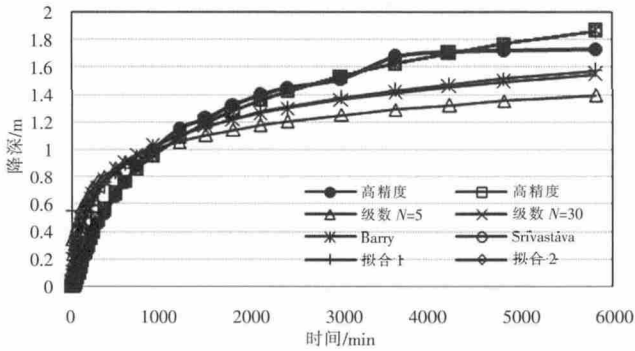


图3 案例1 计算结果对比
Fig.3 The result comparison of case 1

从结果可以很容易看出,与高精度方法计算结果对比,采用级数展开方式及拟合方程式一所得结果误差大,很难满足实际应用要求,配线法也有相当的误差;方法编号为1、5、6、7、9则均可满足计算精度要求,彼此间差异很小。

4.2 多数据井模型参数率定

该案例参考自文献[12]的1977年版本,为某一地区承压含水层进行多孔抽水试验,抽水井的稳定流量为60m³/h,4个观测孔,各观测孔的详细数据见表7。该案例为Theis井模型研究之经典案例,许多研究者^[2-4,11,13]都以该例来比较研究井模型参数率定计算问题。

文献[3]井函数计算采用4项级数展开,仅用观测孔2和观测孔15抽水时间大于30min的30个实测降深数据,Lingo编程计算;文献[2]采用4项级数展开,全

部数据,分别用配线法和梯度法编程求解;文献[4]使用100阶级数展开,允许误差为0.06,粒子群(PSO)优化算法编程求解,三种工况:只用2#孔资料、各个单孔分别求解再取各参数平均值作为最终结果及全部观测孔数据同时进行优化计算得到唯一参数组;文献[11]井函数计算采用Matlab的积分函数quad8,优化算法采用Matlab自带的fmincon函数;文献[9]用4项级数展开,加速遗传算法,编程实现。各文献结果见表8。

该模型实际上是多数据拟合问题,模型的目标函数即是四次试验中计算与实测的水位差之平方和最小,如公式(8),因此四个孔的观测数据要同时使用才能获得正确的参数。1stOpt求解代码如下表9,采用不同井函数计算方法所对应的模型参数值结果见表10。

表7 抽水试验数据
Table7 The pumping experiment data

序号	累计时间 /min	降深/m			
		观测孔 2 井距:43m	观测孔 15 井距:140m	观测孔 10 井距:510m	观测孔 1 井距:780m
1	10	0.73	0.16	0.04	
2	20	1.28	0.48		
3	30	1.53	0.54		
4	40	1.72	0.65	0.06	
5	60	1.96	0.75	0.20	
6	80	2.14	1.00	0.20	0.04
7	100	2.28	1.12	0.20	
8	120	2.39	1.22	0.21	0.08
9	150	2.54	1.36	0.24	0.09
10	210	2.77	1.55	0.40	0.16
11	270	2.99	1.70	0.53	0.25
12	330	3.1	1.83	0.63	0.34
13	400	3.2	1.89	0.65	0.42
14	450	3.26	1.98	0.73	0.50
15	645	3.47	2.17	0.93	0.71
16	870	3.68	2.38	1.14	0.87
17	990	3.77	2.46	1.24	0.96
18	1185	3.85	2.54	1.35	1.06

表8 不同文献求解结果
Table8 The results from different literatures

文献来源	Theis 井函数 计算方法	导水系数 $T/m^2 \cdot d^{-1}$	贮水系数 u_s
[3]	4 阶级数展开	199.51	2.59E-4
[2]	配线法	212.3	1.47E-4
	梯度优化算法	250.5	1.05E-4
	仅用 2# 孔数据	183.99	1.82E-4
[4]	每孔分别求,再取平均	228.91	2.64E-4
	100 阶级数展开		
	全部数据	201.01	2.11E-4
[11]	全部数据	182.01	2.48E-4
	仅用 15# 孔数据	187.27	2.54E-4
[9]	4 阶级数展开	193.4352	2.5E-4

表9 案例二1stOpt计算代码
Table9 1st Opt code of case 2

Constant Q=60*24;
VarConstant r=[43,140,510,780];
ConstStr u=r^2*c/(4*k*t/60/24);
ConstStr W=ExpInt(u);
Variable t,S;
Function S=Q/(4*pi*k)*W;
Data;
10,20,30,40,60,80,100,120,150,210,270,330,400,450,645,870,990,1185;
0.73,1.28,1.53,1.72,1.96,2.14,2.28,2.39,2.54,2.77,2.99,3.1,3.2,3.26,3.47,3.68,3.77,3.85;
Data;
10,20,30,40,60,80,100,120,150,210,270,330,400,450,645,870,990,1185;
0.16,0.48,0.54,0.65,0.75,1.00,1.12,1.22,1.36,1.55,1.70,1.83,1.89,1.98,2.17,2.38,2.46,2.54;
Data;
10,40,60,80,100,120,150,210,270,330,400,450,645,870,990,1185;
0.04,0.06,0.20,0.20,0.20,0.21,0.24,0.40,0.53,0.63,0.65,0.73,0.93,1.14,1.24,1.35;
Data;
80,120,150,210,270,330,400,450,645,870,990,1185;
0.04,0.08,0.09,0.16,0.25,0.34,0.42,0.50,0.71,0.87,0.96,1.06;

表10 不同井函数计算方法参数结果
Table10 The results from various well functions

井函数 计算方法	参数值		目标函数 数值 f	目标函数 相对误差/%
	导水系数 $T/m^2 \cdot d^{-1}$	贮水系数 u_s		
高精度	219.3288	1.8233E-4	1.232989	
级数	$N=5$	249.2022	1.1671E-4	2.186614
展开	$N=30$	283.7275	7.1529E-5	4.201029
Barry		219.3184	1.8234E-4	1.232319
切比雪夫		219.3288	1.8233E-4	1.232989
Srivastava		219.3290	1.8233E-4	1.232991
拟合式(6)		213.7285	1.9593E-4	1.464279
拟合式(7)		219.3287	1.8233E-4	1.232992

由表 8 和 10 对比结果可看出,同一套实验抽水数据不同文献、不同方法得出的模型参数均有不同。虽然目前为止还没有一套标准答案供参考以得出哪种方法更为正确,但通过分析各文献采用的井函数计算方法、优化算法及数据取舍而导致的模型目标函数不同等因素,也可基本判断各方法的优劣。

首先是配线法,是繁琐且人为误差较大的一种方法,随着当今计算机和数值计算技术的突飞猛进,已逐渐处于边缘化,所得结果仅供参考;其次,从前面的计算可看出井函数 $W(u)$ 的计算方法很明显会对模型参数最终结果有较大影响,尤其是采用级数展开方式,如文献[1-4]和[9],所得结果无疑存在相当的偏差,尤其是抽水试验数据开始的几个点,因为累积抽水时间 t 值小, u 值大,参阅图 1 可看出极易导致 $W(u)$ 的较大计算误差;再次,参数优化率定所用数据的方式对结果也有很大影响,如文献[3]不用全部 4 孔数据而仅用观测孔 2 和观测孔 15 的抽水时间大于 30min 的 30 个实测降深数据进行编程计算,这种方式是因为 u 值的计算误差大而忽略了部分数据,所得结果是无法代表模型整体参数;文献[4]使用了三种不同的数据组合模式,虽然在井函数计算时的级数展开项取到高达 100,但采用粒子群优化算法反而发散不收敛导致无法得到稳定唯一解,并得出了“水文地质逆问题解的非唯一性(多解性)”的结论;文献[11]对井函数采用的 Matlab 积分函数 quad8 与高精度值相比有一定的误差,此外 Matlab 的优化函数 fmincon 是局部最优求解函数,初值依赖严重,对非线性强的模型很难保证得到全局最优结果。

本研究提出的基于 1stOpt 计算平台,井函数数值计算采用其内置高精度指数积分函数、参数优化算法则是通用全局优化算法,使用非常简单,所得结果稳定唯一,可作为 Theis 井模型研究的参考范本。

5 结论

Theis 井函数计算方法对 Theis 井模型参数反演计算结果有很大影响,国内应用最为广泛的级数展开计算方式误差较大,根据实际情况应慎用。如果自行编程计算,推荐采用切比雪夫有理逼近方式,计算稍显复杂,但精度高;Srivastava、Barry 及作者提出的拟合方程式也可满足精度要求,使用上相对更简单;如果采用通用数学建模软件平台,相比 Matlab、Lingo 等,1stOpt 更为合适,除了井函数是其内置函数外,强大的全局优化计算能力及更趋自然的建模语言而带来的

简单和易用也是其两大优点。

参考文献:

- [1] 王新端,常安定,郭建青. 正态模糊数的线性回归估计含水层参数[J]. 中国农村水利水电, 2011,(7):59-62. (WANG Xinduan, CHANG Anding, GUO Jianqing. The aquifer parameters using the fuzzy linear regression method based on normal fuzzy numbers [J]. China Rural Water and Hydropower, 2011,(7):59-62. (in Chinese))
- [2] 刘立才,陈鸿汉,张达政. 梯度法在水文地质参数估值中的应用[J]. 水文地质工程地质, 2003,(3):39-41. (LIU Licai, CHEN Honghan, ZHANG Dazheng. Application of gradient method to calculation of hydrogeological parameters [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2003,(3):39-41. (in Chinese))
- [3] 刘建,刘丹. Lingo 在优化水文地质参数估值中的应用 [J]. 地下水, 2008,30(4):27-29. (LIU Jian, LIU Dan. Application of Lingo in optimizing hydrogeological parameters estimation [J]. Underground Water, 2008,30(4):27-29. (in Chinese))
- [4] 丁东,吴剑锋. 微粒群优化算法在 Theis 公式参数识别中的应用[J]. 工程勘察, 2009,(2):32-36. (DING Dong, WU Jianfeng. Application of the particle swarm optimization to the parameter identification in Theis equation [J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2009, (2):32-36. (in Chinese))
- [5] Barry, D.A., Parlange, J.-Y., Li, L. Approximations for the Exponential Integral (Theis well function) [J]. Journal of Hydrology, 2000,227:287-291.
- [6] Srivastava R. Implication of using approximation expression for well function [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1995,121(6):459-462.
- [7] W. J. Cody and Henry C. Thacher, Jr. Rational Chebyshev Approximations for the Exponential Integral $Ei(x)$ [J]. Math. Comp., 1968,22: 641-649.
- [8] 巩彦文,张丽伟,滕凯. 利用非稳定流抽水试验资料求解水文地质参数的新方法 [J]. 地下水, 2008,30 (4):16-18. (GONG Yanwen, ZHANG Liwei, TENG Kai. A new method of calculating hydrological parameter based on some data of the unsteady flow pumping water Test [J]. Ground Water, 2008,30(4):16-18. (in Chinese))
- [9] 金菊良. 遗传算法及其在水问题中的应用 [D]. 南京: 河海大学, 1998. (JIN Juliang. Genetical Algorithm and Its Application to Water Problems [D]. Nanjing: Hohai University, 1998. (in Chinese))
- [10] 张全兴,常安定. 利用差分进化算法反求含水层参数[J]. 煤田地质与勘探, 2008,36(5):54-57. (ZHANG Quanxing, CHANG Anding. Estimation of hydrogeology parameters using differential evolution algorithm [J]. Coal Geology & Exploration. 2008,36(5):54-57. (in Chinese))
- [11] 李林子,朱国荣,江思珉,等. Theis 解析模型的数值解及其在 MatLab 中的实现 [J]. 江苏地质, 2007,(3). (LI Linzi, ZHU Guorong, JIANG Simin, et al. Study on numerical solution on Theis analytic model and its realization in Matlab [J]. Jiangsu Geology, 2007,(3). (in Chinese))
- [12] 薛禹群. 地下水动力学 [M]. 北京: 地质出版社, 1997. (XUE Yuqun. Groundwater Dynamics [M]. Beijing: Geology Press, 1997. (in Chinese))

(下转第 52 页)

有将同一趋势变化和局部细节特性的序列分解到一起,产生建模误差;小波分解之后的序列不适合使用灰色模型来预测。

参考文献:

- [1] 王开章,刘福胜,孙鸣. 灰色模型在大武水源地水质预测中的应用王开章[J]. 山东农业大学学报(自然科学版), 2002,33(1):66-71. (WANG Kaizhang, LIU Fusheng, SUN Ming. The application of grey model in Dawu water quality predication water resource site[J]. Journal of Shandong Agricultural University(Natural Science), 2002,33(1):66-71. (in Chinese))
- [2] 樊春玲,高峰,孙四通,等. 基于灰色模型的混合建模预测方法及其应用[J]. 中国惯性技术学报, 2008,16(4):475-479. (FAN Chunling, GAO Feng, SUN Sitong, et al. A novel grey-based hybrid modeling method and its application[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008,16(4):475-479. (in Chinese))
- [3] 王秀萍,吴清海,赵宝锋. 灰色模型联合小波变换进行变形预测的研究[J]. 工程勘察, 2006,(12):66-69. (WANG Xiuping, WU Qinghai, ZHAO Baofeng. The analytical research of wavelet transform and

gray model or deformation forecast [J]. Journal of Geotechnical Investigation & Surveying, 2006,(12):66-69. (in Chinese))

- [4] 桑燕芳,王栋. 水文序列小波分析中小波函数选择方法[J]. 水利学报, 2008,39(12):295-301. (SANG Yanfang, WANG Dong. Wavelets selection method in hydrologic series wavelet analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008,39(12):295-301. (in Chinese))
- [5] Muhammad Shoaib, Asaad Y. Shamseldin, Bruce W. Melville. Comparative study of different wavelet based neural network models for rainfall-runoff modeling [J]. Journal of Hydrology, 2014,55(4):47-58.
- [6] 王文圣,丁晶,李跃清. 水文小波分析[M]. 北京: 化学工业出版社, 2005. (WANG Wensheng, DING Jing, LI Yueqing. Hydrology and Wavelet Analysis [M]. Beijing: Chemical Industry Press, 2005. (in Chinese))
- [7] 王文圣,袁鹏,丁晶. 小波分析及其在日流量过程随机模拟中的应用[J]. 水利学报, 2000,31(11):23-30. (WANG Wensheng, YUAN Peng, DING Jing. Wavelet analysis and its application to stochastic simulation of daily flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000,31(11):23-30. (in Chinese))

Influence of Different Wavelet Functions on Accuracy of Gray Model

SHI Zhaojun, ZHU Mei, ZHOU Di, ZHENG Jiazhong

(College of Engineering, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

Abstract: In light of the problem that how to select the wavelet function facing the prediction of hydrological series by the wavelet based gray model, this paper analyzed the impacts on the accuracy of different wavelet based gray models by taking the measured rainfall of the Anqing Station as an example and using the predicted values of the traditional gray model as a reference. It also took the seven kinds of wavelet functions including Haar, Db, Smy, Coif, Bior, Rbio and Dmey into consideration and made the Root Mean Squared Error (RMSE) and the Nash - Sutcliffe Efficiency (NSE) as the evaluation indexes to the models. The result shows that different wavelet functions have both positive and negative effects on the accuracy of models, among which db1 wavelet function is the most effective one to improve the accuracy of the model based on Anqing's rainfall series..

Key words: wavelet analysis; gray model; accuracy

(上接第 13 页)

Study on Theis-well Function Computation Methods and Auto-calibration of Well Model

CHENG Xianyun¹, ZHENG Fandong², YANG Hao², CAO Daling¹, YANG Yong²

(1. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100038, China;

2. Beijing Institute of Water Science and Technology Research, Beijing 100044, China)

Abstract: Summarizing the various numerical methods for computing the Thies well-function, the advantages and disadvantages of each method were analyzed and compared, and their impacts on final model parameter estimation were concluded, a new simplified alternative way was proposed too. Two real examples were adopted to examine the performance of both well-function computation and model auto-calibration. The study results show that: (1) The wide-used series expansion method for calculation of Thies well-function should be thought for use with much caution; (2) Universal optimization platform 1stOpt can be considered as an advance tool for parameter auto-calibration of Theis well-model, and the platform could also be widely applied on other hydrological models.

Key words: Theis well model; Theis well-function; parameter optimization; 1stOpt