

# 河流年径流量的 R/S 灰色预测

李宝玲, 李建林, 昝明军, 李志强

(河南理工大学资源环境学院, 河南 焦作 454003)

**摘要:** 径流过程具有分形和灰色特征。基于此, 将 R/S 分析与灰色系统理论相结合, 提出了 R/S 灰色预测模型以预报河流年径流量。针对黑河正义峡水文站 60a(1949~2011 年) 的年径流量资料, 首先进行 R/S 分析, 确定径流量序列的 Hurst 指数  $H$  和平均循环周期  $T$ ; 然后在一个周期内进行年径流量灰色预测。结果表明: R/S 灰色预测结果的精度明显高于直接进行灰色预测的精度。该方法拓宽了分形和灰色理论在径流过程研究的应用范围, 为河流径流量的科学预测提供了一种新方法。

**关键词:** 年径流量; R/S 灰色预测; 平均循环周期; 黑河

中图分类号: TV121

文献标识码: A

文章编号: 1000-0852(2015)02-0044-05

河川径流量是水资源综合利用、科学管理和优化调度最重要的依据<sup>[1]</sup>, 所以径流量预测是水文计算的重要内容之一。按照预测时段划分, 分为短期(以天为单位)和中长期(以月或年为单位)径流量预测; 按照预测方法划分, 主要分为基于成因预测和数理统计预测两大类, 其中统计预测是目前常用的径流量预测手段, 包含了传统的统计学方法以及灰色预测、模糊预测、神经网络预测、小波分析和马尔柯夫链等方法<sup>[2]</sup>。径流过程受诸多因素影响具有典型的非线性运动特征<sup>[3]</sup>, 分形理论是非线性科学的重要理论之一。在我国, 将分形理论应用于径流过程的研究开始于 1998 年<sup>[4]</sup>, 其中一个重要应用方向是利用 R/S(重标极差)法进行径流序列的分析<sup>[5]</sup>。但在求出 Hurst 指数验证径流序列具有分形特征之后, 该如何进行更为深入的研究, 一直没有突破。径流变化也具有明显的灰色特征<sup>[6]</sup>。在我国, 将灰色理论应用于河流径流量的预测开始于 20 世纪 80 年代, 至今该理论的应用已经相当成熟<sup>[7]</sup>。为了克服预报随机波动性较大的序列时拟合较差、精度降低的缺点, 一些学者采用灰色理论与其他理论(BP 神经网络、马尔科夫过程等)相结合的方法, 对其进行了改进, 效果较好<sup>[8]</sup>。基于此, 本研究采用 R/S 分析与灰色理论相结合的方法进行径流量预测, 探讨分形和灰色

理论在径流过程研究中的进一步应用。

## 1 R/S 灰色预测模型原理

### 1.1 R/S 分析法

R/S 分析法能从分形时间序列中区分出随机序列和非随机序列, 为径流量时序的复杂性演变提供一种有效的非线性科学预测方法。通过 Hurst 指数可以判定径流量时间序列的分形结构和状态持续性; 通过平均循环长度可以估算系统的记忆时间长度<sup>[9]</sup>。

#### 1.1.1 Hurst 指数

对于一个非随机过程, 首先须满足:

$$R(n)/S(n)=(an)^H \quad (1)$$

式中:  $R(n)/S(n)$  为重标极差;  $n$  为增量区间长度;  $a$  为常数;  $H$  为 Hurst 指数。

其实现过程为:

① 定义长度为  $N$  的径流量序列  $\{x(k)\}$ , 等分为长度为  $n$  ( $n \geq 3$  的整数, 且  $M^n=N$ ) 的  $M$  个连续子序列。其中, 各子序列记为  $D_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ), 其相应元素为  $x_{k,m}$ , 求得  $D_m$  的均值  $\bar{x}_m$ ;

② 计算  $D_m$  ( $n$  个期间) 的累积离差  $X_{k,m}$

$$X_{k,m} = \sum_{k=1}^n (x_{k,m} - \bar{x}_m) \quad (2)$$

收稿日期: 2014-02-26

基金项目: 国家自然科学基金重点项目“黑河流域生态水文样带调查”(91025002)

作者简介: 李宝玲(1992-)女, 河南郑州人, 本科生, 专业为水文学与水资源。E-mail: libaoling0806@163.com

通讯作者: 李建林(1973-)男, 甘肃天水人, 博士, 教授, 研究方向为水文水资源和水文地质。E-mail: lijianlin@hpu.edu.cn

③由  $X_{k,m}$  算出  $D_m$  的极差  $R_m$  及其标准差  $S_m$ ;

④根据上述结果计算  $D_m$  的重标极差

$$(R/S)_m = R_m / S_m \quad (3)$$

⑤对每个子序列, 重复①~④步, 则该序列的重标极差为:

$$(R/S) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (R/S)_m \quad (4)$$

⑥将  $n$  不断增大, 直至  $n=N/3$ , 最终得到  $\{x(k)\}$  的重标极差系列, 且满足式(1)。

对式(1)两边取对数可得:

$$\lg(R/S)_n = H \lg a + H \lg n \quad (5)$$

以  $\lg n$  为自变量,  $\lg(R/S)$  为因变量作散点图, 以最小二乘估计拟合直线, Hurst 指数的值则表现为该直线的斜率。

若  $H=0.5$ , 径流量序列为随机序列;  $0 \leq H < 0.5$ , 则为一种反持久性序列, 如果时序先前有上升趋势, 那么它将会有下降趋势;  $0.5 < H \leq 1$ , 径流量序列具有状态持续性;  $H$  越接近 1, 序列的持续性程度越强, 反之越弱。

### 1.1.2 平均循环周期

引入统计量  $V(n)$ :  $V(n) = (R/S)_n / \sqrt{n}$  (6)

对独立随机时间序列,  $V(n) - \lg n$  曲线是平坦的; 对具有状态持续性  $H > 0.5$  的过程,  $V(n) - \lg n$  曲线向上倾斜; 对于具有逆状态持续性  $H < 0.5$  的过程,  $V(n) - \lg n$  曲线向下倾斜。当  $V(n) - \lg n$  曲线上  $V(n)$  随  $\lg n$  的变化趋势发生改变, 即曲线出现明显转折时, 历史状态对未来状态的影响消失, 此时系统的平均循环周期  $T$  就是对应的时间跨度  $n$ 。

## 1.2 灰色系统 GM(1,1) 模型

### 1.2.1 模型的建立

设原始序列为

$$X^{(0)}(k) = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\} \quad (7)$$

对  $X^{(0)}(k)$  作一次累加, 得到:

$$X^{(1)}(k) = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\} \quad (8)$$

其中,  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n$

则 GM(1,1) 灰色模型的微分方程为:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u \quad (9)$$

### 1.2.2 模型参数的确定

应用最小二乘法原理, 可求解模型参数  $a, u$ , 即

$$(a, u)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (10)$$

其中:

$$B = \begin{bmatrix} -[x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)]/2 & 1 \\ -[x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)]/2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -[x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)]/2 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 模型的求解

将函数(9)离散化, 利用初始条件对其求解, 得:

$$x^{(1)}(k+1) = [x^{(0)}(1) - u/a]e^{-ak} + u/a \quad (11)$$

经累减还原可得原数据序列的估计值:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = [x^{(0)}(1) - u/a](1 - e^{-a}) + u/a \end{cases} \quad (12)$$

### 1.2.4 模型精度和适用范围

灰色预测模型一般有 3 种检验方法: 残差检验、关联度检验和后验差检验。其中, 残差检验是对实测值和预测值之间的误差进行的一种逐点检验的方法, 通过各点的相对残差值, 可以计算出预测模型的精度值  $P$ 。

设实测序列为式(7)所示, 预测序列为:

$$\bar{X}^{(0)}(k) = \{\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(n)\} \quad (13)$$

则平均相对误差为:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \quad (14)$$

精度为:  $P = 1 - \bar{\delta}$  (15)

若  $P \geq 0.8$ , 模型通过残差检验; 若  $P < 0.8$ , 则须先修正模型使之满足对精度的要求, 才可以进行预测; 精度越高, 模型拟合得越好。

## 2 R/S 灰色预测模型计算步骤

通过 R/S 分析, 确定径流序列的变化周期  $T$ ; 在一个周期内进行灰色预测, 所得模型即为 R/S 灰色预测模型。 $T$  的含义是径流量序列的平均记忆期为  $T$  年, 即第  $k$  年径流量的值会影响到第  $k+T$  年的径流量, 而对再往后的径流量影响甚弱, 甚至没有影响。所以, R/S 灰色预测的具体步骤如下:

①利用公式(1)~(6), 计算径流序列的 Hurst 指数  $H$  和平均循环周期  $T$ 。

②在径流序列中任取连续  $T-1$  年的径流量作为初始值, 记为  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{T-1}\}$ 。对序列  $Q$  进行灰色预测模型验证。如果预测模型精度  $P > 80\%$ , 模型通过残差检验, 否则须对模型进行修正, 直至  $P > 80\%$ ;

③用  $q_1, q_2, \dots, q_{T-1}$  的径流量预测第  $T$  年的径流量, 预测结果记为:  $\hat{q}_T$ ;

④用  $q_1, q_2, \dots, q_{T-1}$  以及第  $T$  年的预测值  $\hat{q}_T$  作为初

始值,预测第  $T+1$  年的径流量,预测结果记为:  $\hat{q}_{T+1}$ ;

⑤重复以上步骤,可预测今后若干年的年径流量。

特别注意的是:(1) ③~⑤步得到预测径流量之后,一定要进行残差检验,若  $P>80\%$  则可继续预测,否则终止预测;(2)每次预测须保证初始值为  $T-1$  个。

预测过程采用式(7)~(12)计算、验证过程采用式(13)~(15)计算。可用实测径流量代替预测径流量进行整个周期的预测,以提高预测精度。

### 3 实例分析

#### 3.1 研究区概述

黑河发源于祁连山北麓,干流全长 821km,流域总面积为  $14.29 \times 10^4 \text{km}^2$ ,是我国第二大内陆河。以莺落峡和正义峡为界,黑河流域划分为上、中、下游。莺落峡以上祁连山区为上游,是径流的主产流区;莺落峡至正义峡为中游,是水资源的主利用区;正义峡以下为下游,是河湖尾间消失区。所以,正义峡水文站测流断面的年径流量对黑河下游水资源配置以及下游脆弱的生态环境的维护与恢复起着关键的作用。

#### 3.2 年径流量的 R/S 分析

本研究针对黑河流域正义峡水文站年径流实测数据(1949~2011年,见图1)进行分析与预测。

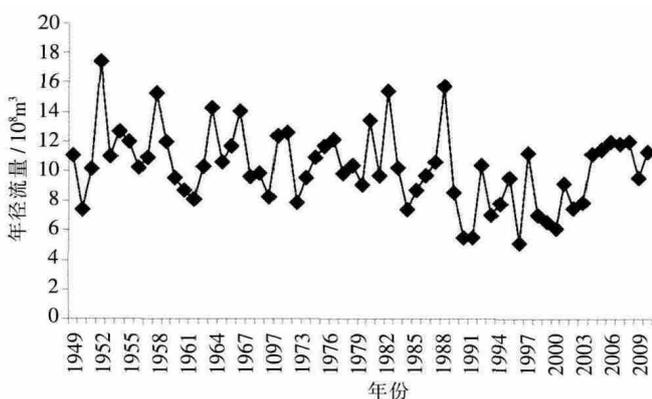


图1 黑河正义峡断面年径流量变化曲线  
Fig.1 The annual runoff at the Zhengyixia station

##### 3.2.1 Hurst 指数

分别取  $n$  为 3、5、6、10、12、20、30,按照式(1)~(7)分别对正义峡径流量序列进行分析计算,并做出  $\lg n$  与  $\lg(R/S)$  拟合图(见图2)。

由图2可得:

$$\lg R/S = 0.7413 \lg n - 0.5234, R^2 = 0.996$$

所以,正义峡断面年径流量序列的 Hurst 指数为 0.7413。  $H>0.5$ ,说明正义峡断面年径流量序列为分形时间序列,存在长期记忆性和持续性。

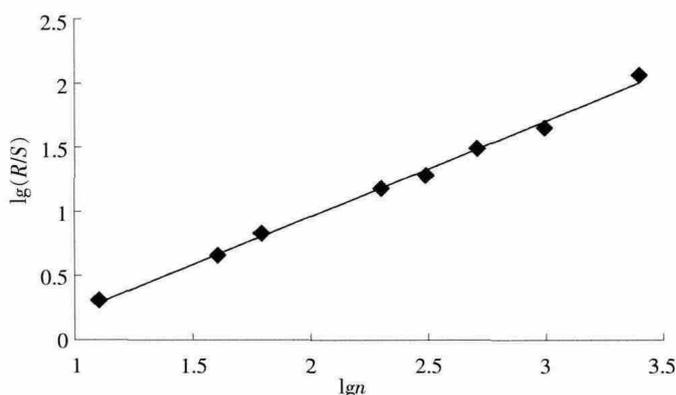


图2 黑河正义峡年径流量 R/S 分析

Fig.2 R/S analysis of the annual runoff at the Zhengyixia station

##### 3.2.2 平均循环周期

根据式(6)计算统计量  $V(n)$ ,并绘制  $V(n)-\lg n$  数据点折线图(见图3)

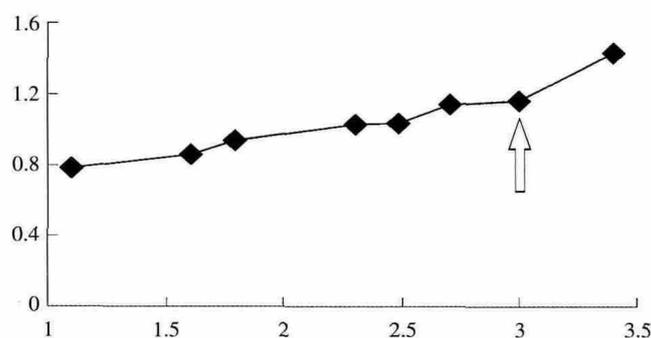


图3 黑河正义峡年径流量  $V(n)-\lg n$  统计图

Fig.3  $V(n)-\lg n$  statistics of the annual runoff at the Zhengyixia station

图3中有多个转折点,遵循最大  $H$  值且拟合度较高的原则选择突变点作为径流序列的平均周期<sup>[10]</sup>,得到黑河正义峡断面年径流量序列的平均循环周期  $T=20a$ (箭头所示处)。  $T$  表征了系统对初始条件的平均记忆长度,即黑河正义峡年径流量序列在 20a 后将完全失去对初始条件的依赖。

##### 3.3 年径流量 R/S 灰色预测

采用上述计算步骤进行年径流量预测(以预测 1992~2011 年水文径流量为例)。由于已经得到平均循环周期  $T=20a$ ,故取 1973~1991 年(共 19a)的实测径流量作为初始值。预测过程采用式(7)~(12)计算、验证过程采用式(13)~(15)计算。预测结果如表 1 所示。

### 4 讨论

#### 4.1 预测结果的残差分析

将 2009~2011 年的预测径流量与实测年径流量进行对比,计算预测精度(见表 1)。

表1 1992~2011年黑河正义峡年径流量预测结果及残差分析  
Table 1 Comparing predicted and measured values of annual runoff at the Yingluoxia station from 1992 to 2011

年份	实测值 / 10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	R/S 灰色预测		灰色预测	
		预测值 / 10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	相对误差 / %	预测值 / 10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	相对误差 / %
1992	5.47	7.68	40.42	9.63	76.00
1993	10.40	9.75	6.22	9.55	8.21
1994	7.01	9.15	30.48	9.46	35.02
1995	7.82	9.40	20.21	9.38	19.99
1996	9.54	9.18	3.78	9.30	2.53
1997	5.13	9.03	75.85	9.22	79.63
1998	11.21	8.41	24.98	9.14	18.46
1999	7.02	8.65	23.29	9.06	29.18
2000	6.60	8.25	25.08	8.98	36.24
2001	6.12	8.08	32.02	8.91	45.53
2002	9.13	8.10	11.25	8.83	3.29
2003	7.50	7.97	6.29	8.75	16.71
2004	7.84	8.00	1.99	8.68	10.68
2005	11.13	8.93	19.76	8.60	22.68
2006	11.47	9.39	18.13	8.53	25.61
2007	11.96	9.44	21.08	8.45	29.31
2008	11.82	10.93	7.56	8.38	29.09
2009	11.98	11.67	2.60	8.31	30.64
2010	9.57	11.10	16.03	8.24	13.92
2011	11.27	11.82	4.88	8.17	27.54
平均误差	—	—	19.60	—	28.01

由表 1 可知,R/S灰色预测结果的平均误差为 19.60%,预测精度  $P=80.40\%$ 。说明利用 R/S灰色预测模型预测河流年径流量是可行的。

#### 4.2 与直接进行灰色预测比较

将 1973~1991 年的数据作为预测模型的基础数据直接预测 1992~2011 年的径流量,计算结果与基于 R/S 分析后的灰色预测结果进行对比(见表 1)。

由表 1 可知:(1)直接进行灰色预测的精度为 71.99%(<80%),说明由于实测径流量变化幅度比较大(见图 1),直接采用灰色预测模型的效果不太理想。(2)基于 R/S分析的灰色预测的精度为 80.40%(>80%),说明通过 R/S分析确定径流序列的平均循环周期之后,只需要 20a 的径流量资料就可以进行径流量灰色预测;(3)两种方法的预测精度相差近 10%,说明在进

行河流年径流量预测时,R/S灰色预测模型明显优于灰色模型。

#### 4.3 关于循环周期 T

本研究根据 1949~2011 年径流量资料,采用 R/S 分析得到的黑河正义峡断面年径流量平均循环周期为 20a;侯红雨(2010)通过计算认为黑河干流年径流量循环周期为 22a<sup>[11]</sup>;由于具有分形特征的序列本身没有周期,通过 R/S分析得到的周期也只是对径流序列特征的描述,所以可以认为黑河正义峡断面年径流量循环周期应该在 20~22a 之间。分别取  $T=20$ 、21、22a,采用标题 2 中①~④的步骤进行 R/S灰色预测,得到如表 2 的预测结果。

当取  $T=21a$  时,第一次预测效果较好,相对误差只有 7.40%;而再次预测时,相对误差高达 61.69%,已无法继续预测。取  $T=22a$  时,首次预测的误差为 15.84%,而第二次预测已经无法进行。取  $T=20a$  时,平均误差只有 10.57%。说明取  $T=20a$  时,利用 R/S灰色预测的结果最好。需要说明的是,由于表 1、表 2 在预测中所选初始值不同(表 1 初始值为 1973~1991 年径流量,表 2 初始值为 1990~2008 年径流量),所以两表中 2009~2011 年径流量的预测结果及相对误差都不同。

### 5 结论与展望

#### 5.1 结论

(1)径流量时间序列具有分形特征,可利用 R/S 方法进行分析,Hurst 指数  $H$  和平均循环周期  $T$  是 R/S 分析法稳定有效的统计量。 $H$  可以判定径流量时间序列的分形结构和状态持续性; $T$  用于检验 R/S稳定性,判别序列是否存在周期循环及估计周期长度。径流量序列也具有明显的灰色特征,基于 R/S分析的灰色预测模型为径流量预测提供了一种新的方法。

(2)黑河正义峡断面年径流量序列(1949~2011年)具有明显的状态持续性,其平均循环周期在 20~22 年之间,在进行灰色预测时,取  $T=20$  为宜;R/S灰色预测的精度为 80.40%,达到了灰色预测所要求的精度;而

表2 不同周期下黑河正义峡年径流量R/S灰色预测结果比较  
Table2 Results compare of annual runoff by R/S Gray predicted under different cycles at the Zhengyixia station

年份	T=20		T=21		T=22	
	预测值/10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	相对误差/ %	预测值/10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	相对误差/ %	预测值/10 <sup>8</sup> m <sup>3</sup>	相对误差/ %
2009	11.39	4.94	11.09	7.40	9.95	16.93
2010	11.55	21.72	3.67	61.69	—	—
2011	11.84	5.06	—	—	—	—
平均误差	—	10.57	—	—	—	—

且明显高于灰色模型直接预测的结果,说明该预测模型效果良好。

## 5.2 研究展望

(1)在我国,分形理论应用于径流过程研究已经有十多年的时间,但目前仍然处在验证阶段。这与分形是一门新的学科,其基础理论的研究还不完善有很大的关系。如何进行深入研究,是各学科面临的共同问题。就径流过程而言,应该从分形的基础理论和径流变化机理 2 个方面做进一步的深入探索。

(2)本文在利用 R/S 法分析径流量序列的变化趋势和周期后,只采用了灰色预测方法对黑河正义峡断面年径流量进行了预测和对比分析。是否可以将 R/S 分析方法和其它方法结合进行河流径流量预测,将做进一步的探讨。

### 参考文献:

- [1] 曹辉,黄强,白涛,等. 径流预测方法对比分析[J]. 人民黄河, 2009,31(9):36-37.(CAO Hui, HUANG Qiang, BAI Tao, et al. Comparative analysis of runoff forecasting methods [J]. Yellow River, 2009,31(9):36-37.(in Chinese))
- [2] 邱林,安可君,王文川.基于 Bayes 分类的 Markov 径流量预测模型[J]. 水利科技与经济, 2011,17(12):1-4.(QIU Lin, AN Kejun, WANG Wenchuan. Prediction of runoff model based on bayes classification of Markov method [J]. Water Conservancy Science and Technology and Economy, 2011,17(12):1-4.(in Chinese))
- [3] 张少文,王文圣,丁晶,等. 分形理论在水文水资源中的应用[J]. 水科学进展, 2005,16(1):141-146. (ZHANG Shaowen, WANG Wensheng, DING Jing, et al. Application of fractal theory to hydrology and water resources [J]. Advances in Water Science, 2005,16(1):141-146.(in Chinese))
- [4] 刘德平. 分形理论在水文过程形态特征分析中的应用[J]. 水利学报, 1998,(2):20 - 25. (LIU Deping. The application of fractal theory in hydrologic process shape characteristic analysis [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1998,(2):20-25.(in Chinese))
- [5] 谢平,陈广才,雷红富. 基于 Hurst 系数的水文变异分析方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2009,17(1):32-39.(XIE Ping, CHEN Guangca, LEI Hongfu. Hydrological alteration analysis method based on Hurst coefficient [J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2009,17(1):32-39.(in Chinese))
- [6] 夏军. 水文非线性系统概念性模型及灰色参数识别[J]. 武汉水利电力学院学报, 1985,(2):21-34. (XIA Jun. Conceptual model of hydrologic nonlinear system and grey parameter coefficient [J]. Journal of Wuhan Institute of Hydraulic and Electric, 1985,(2):21-34. (in Chinese))
- [7] 吴丽娜,黄领梅,沈冰. 大峪河年径流量的灰色拓扑预测与趋势分析[J]. 人民黄河, 2012,34 (1):62-65. (WU Lina, HUANG Lingmei, SHEN Bing. Analysis of dynamic trend and grey topology prediction of annual runoff in Dayu river [J]. Yellow River, 2012,34(1):62-65. (in Chinese))
- [8] 张举,丁宏伟. 灰色拓扑预测方法在黑河出山径流量预报中的应用[J]. 干旱区地理, 2005,28(6):751-755. (ZHANG Ju, DING Hongwei. Application of the gray topological method in predicting runoff volume at the debouchure of the Heihe river [J]. Arid Land Geography, 2005,28(6):751-755.(in Chinese))
- [9] 曲广周,覃英宏,刘亮,等. 基于 R/S 分析黄河及黄土高原主要河流水资源的变化[J]. 中国沙漠, 2010, 30(2):467-450. (QU Guangzhou, TAN Yinghong, LIU Liang, et al. Analysis of water resources variation of Yellow river and main river in the Loess plateau with R/S method [J]. Journal of Desert Research, 2010,30(2):467-450. (in Chinese))
- [10] 燕爱玲,黄强,刘招,等. R/S 法的径流时序复杂特性研究[J]. 应用科学学报, 2007,25 (2):214-217. (YAN Ailing, HUANG Qiang, LIU Zhao, et al. Complicated property of runoff time series studied with R/S method [J]. Journal of applied sciences, 2007,25(2):214-217. (in Chinese))
- [11] 侯红雨,杨丽丰,李福生,等. 基于时间序列分析的黑河干流年径流预报 [J]. 人民黄河, 2010,32 (12):49-51. (HOU Hongyu, YANG Lifeng, LI Fusheng, et al. Based on the analysis of time series forecasting annual runoff of the Heihe river [J]. Yellow River, 2010,32(12):49-51. (in Chinese))

## R/S Grey Prediction of River Annual Runoff

LI Baoling, LI Jianlin, ZAN Mingjun, LI Zhiqiang

(Institute of Resources & Environment, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China)

**Abstract:** River runoff series has the characteristics of fractal and gray. Therefore, by combining gray system theory with R/S analysis, R/S gray prediction model was proposed to forecast annual runoff. Based on the data of the annual runoff at the Zhengyixia Station of the Heihe River during the period 1949-2011, the runoff series were analyzed by R/S method. The Hurst exponent and average cycle of river runoff series were determined firstly; then, in one cycle, annual runoff was predicted by gray. The prediction results show that R/S gray prediction model has higher precision indeed. This method broadens the application range of fractal theory and grey model, and provides a new scientific approach for predicting annual runoff.

**Key words:** annual runoff; R/S gray prediction; average circular period; Heihe River