# 应用 matlab 求解小流域推理公式的方法

田景环，梁文涛

（华北水利水电学院，河南 郑州 450011）

**摘　要：**针对《水利水电工程设计洪水计算规范》在推求小流域洪水时采用的推理公式，提出以图解法及牛顿迭代法为基础，用 matlab 软件在各种汇流类型下求解推理公式的洪峰流量及汇流时间，该方法计算速度快、精度高，而且简便、实用、易操作。

**关键词：**推理公式；图解法；牛顿迭代法；matlab

**中图分类号：**TV122　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000-0852(2013)01-0079-03

## 1　概述

小流域洪水计算在水利水电工程规划设计中占有重要地位。1956 年，原水利科学研究院水文研究所的林平一提出了以推理公式为基础的计算最大流量方法，1958 年陈家琦等人提出了水利科学院推理公式，并很快在实际运用中得到了普及[1]。现行《水利水电工程设计洪水计算规范》中推荐小流域设计洪水采用水科院推理公式计算进行计算。求解推理公式洪峰流量 $Q_m$ 及汇流时间 $\tau$ 常采用图解法求解法、迭代法等，但图解法比较繁琐，而且手绘图形精确度不高；迭代法的收敛速度较慢，虽然引进了牛顿迭代法[2]解决了这一问题，但是迭代法求解推理公式所适用的汇流类型还有待进一步研究。本文以图解法和牛顿迭代法为基础，提出利用 matlab 软件求解小流域推理公式的方法。该方法可求解各种同汇流类型下推理公式的洪峰流量 $Q_m$ 及汇流时间 $\tau$，不仅简便、实用、易操作，且计算速度快、精度高。

## 2　推理公式及求解原理

### 2.1　推理公式

$$\tau=0.278\frac{L}{mJ^{1/3}Q_m^{1/4}} \tag{1}$$

$$Q_m=0.278\frac{h_t}{t}F \tag{2}$$

$t<t_c$ 时，

$$h_t=H_t-\mu t \tag{3}$$

$$H_t=S_p t^{1-n} \tag{4}$$

$t\geq t_c$ 时，

$$h_t=h_R \tag{5}$$

$$h_R=nS_p\left[(1-n)\frac{S_p}{\mu}\right]^{\frac{1-n}{n}} \tag{6}$$

$$t_c=\left[(1-n)\frac{S_p}{\mu}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{7}$$

公式（1）~（7）中：$L$ 为河道长度；$J$ 为河道比降；$F$ 为流域面积；$Q_m$ 为设计洪峰流量；$m$ 为汇流参数；$\mu$ 为平均降雨入渗率；$n$、$S_p$ 为暴雨参数；0.278 为单位换算系数；$t_c$ 为产流历时；$\tau$ 为汇流历时；$h_R$ 为单一洪峰的净雨；$H_t$ 为 $t$ 时段最大雨量。

### 2.2　图解法原理

先假设出一组 $Q_m$ 值，根据公式（1）计算出一组相应的 $\tau$ 值，绘出 $Q_m$~$\tau$ 关系曲线。假设汇流类型，在 $t<t_c$ 或 $t\geq t_c$ 时，根据公式（2）（3）（4）（5）确定不同汇流类型时的 $Q_m$~$t$ 关系式。取之前 $Q_m$~$\tau$ 计算中求出的 $\tau$ 值，令 $t=\tau$，即可求出一组对应的 $Q_m$~$t$ 值，将求出的两组 $Q_m$~$\tau$、$Q_m$~$t$ 值点绘在同一坐标系内，描出两条关系曲线，两条曲线的交点即为所求的设计洪峰流量值 $Q_m$。若有交点，求出 $Q_m$ 对应的时间 $t$，并通过公式（7）求出的 $t_c$ 与之对比，是否符合之前对流域汇流类型的假设，不符合假设则需重新设定流域汇流类型进行计算。若无交点，则重新假设 $Q_m$ 值，继续上述计算[3]。

收稿日期：2012-05-14

作者简介：田景环（1965-），女，河北涿州人，教授，主要从事水力学及河流动力学的科研和教学工作。E-mail：tianjinghuan@ncwu.edu.cn

### 2.3 迭代法公式

$$Q_m=0.278(\alpha-\mu)F=0.278(\frac{S_p}{\tau^n}-\mu)F \tag{8}$$

式中：$\alpha$ 为平均暴雨强度。

### 2.4 迭代法原理

简单迭代法[4]原理就是将方程 $f(x)=0$ 整理成形如 $x=\varphi(x)$ 的等价方程，然后给定一个初值 $x_0$，将 $x_0$ 代入公式右端，可得出 $x_1=\varphi(x_0)$，再将 $x_1$ 代入方程右端得到 $x_2$，依次类推，可得到 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，$k=0,1,2\cdots$ 如果迭代方程 $x=\varphi(x)$ 是收敛的，则必有 $x^*=\varphi(x^*)$，$x^*$ 即为方程的解。牛顿迭代法是设 $x_k$ 为方程 $f(x)=0$ 的一个近似根，把 $f(x)$ 在 $x_k$ 处泰勒展开，得到近似方程 $f(x_k)-f'(x_k)(x-x_k)=0$，从而构造出形如 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的迭代方程，大大提高了迭代方程的收敛速度，减少计算步骤。

### 2.5 对推理公式的整理

把公式(1)代入(8)中并整理，得到

$$Q_m=0.278^{1-n}S_p(\frac{mJ^{1/3}}{L})^nQ_m^{n/4}-0.278\mu F \tag{9}$$

设 $A=0.278^{1-n}S_p(\frac{mJ^{1/3}}{L})^n$，$B=0.278\mu F$，则

$$Q_m=AQ_m^{n/4}-B \tag{10}$$

可得到迭代公式

$$Q_m=Q_{m0}-\frac{Q_{m0}-AQ_{m0}^{n/4}+B}{1-\frac{n}{4}AQ_{m0}^{\frac{n-4}{4}}} \tag{11}$$

设公式(10)中的 $B$ 值为 0，则此时 $Q_m$ 取得最大值 $Q_{m0}=A^{4/(4-n)}$，将此值作为迭代的初值[5]。

## 3 推理公式的 matlab 求解

求解推理公式即为求解公式(1)与(2)的联立方程。

当 $t\geq t_c$，汇流类型为部分汇流时，$t=\tau$，将(1)(5)(6)代入(2)中，整理得

$$Q_m=\left\{\frac{0.278FnS_p\left[(1-n)\frac{S_p}{\mu}\right]^{\frac{1-n}{n}}mJ^{1/3}}{L}\right\}^{4/3} \tag{12}$$

建立 M 文件如下，并保存：

```
function [Qm]=f1(S,m,J,L,u,n,F)%各参数
Qm=((F*m*J^(1/3)*n*S*((1-n)*S/u)^((1-n)/n))/L)^(4/3)
t=0.278*L*(m*J^(1/3)*Qm^(1/4))^(-1)
tc=((1-n)*S/u)^(1/n)
```

在指令窗口输入 f1(S,m,J,L,u,n,F)，即可得到结果 $Q_m$、$t$、$t_c$。若 $t\geq t_c$，则可取，若 $t<t_c$，则运行如下 function [Qm,A,B,Qm0,t]进行计算。

当 $t<t_c$，即全面汇流时，将公式(1)(3)(4)代入公式(2)，即可得到公式(9)，也就是迭代法求解推理公式的方程。

建立 M 文件如下，并保存：

```
function [Qm,A,B,Qm0,t]=f2(S,m,J,L,u,n,F)%各参数
A=(0.278^(1-n))*S*((m*J^(1/3))^n)*L^(-n)*F
B=0.278*u*F
Qm0=A^(4/(4-n))%迭代初值
for i=1:10%迭代次数
Qm0=Qm0-(Qm0-A*Qm0^(n/4)+B)/(1-A*n/4*Qm0^((n-4)/4))
end
Qm=Qm0
t=0.278*L*(m*J^(1/3)*Qm^(1/4))^(-1)
```

在 matlab 的指令窗口中输入 f2(S,m,J,L,u,n,F)，即可得到结果 $Q_m$、$t$。

计算时先假设 $t\geq t_c$，调用 function [Qm]，求出 $Q_m$、$t$、$t_c$，若求得 $t\geq t_c$，则 Qm 为所求设计洪水、$t$ 为汇流时间。若求得 $t<t_c$，调用 function [Qm,A,B,Qm0,t]，即可得到结果 $Q_m$、$t$。

## 4 实例

### 4.1 算例 1

已知某流域特征参数如表 1，求该流域百年一遇设计洪峰流量。

表 1 流域特征参数

Table 1 The characteristic parameters of the watershed

| $F$/km² | $L$/km | $J$ | $m$ | $n$ | $\mu$/mm.h⁻¹ | $S_p$/mm.h⁻¹ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 45 | 0.004 | 0.7 | 0.7 | 2.3 | 65 |

#### 4.1.1 图解法求解

由公式 $\tau=0.278\frac{L}{mJ^{1/3}Q_m^{1/4}}=\frac{112.58}{Q_m^{1/4}}$，假设 $Q_m$=230、235、240、245m³/s，与之相对应的 $\tau$ 分别为 28.91、28.75、28.60、28.46。由此可得 $Q_m\sim\tau$ 关系曲线。假设 $t\geq t_c$，则 $h_t=h_R$，于是 $Q_m=0.278\frac{h_R}{t}F=\frac{7271.6}{t}$，并取 $t$=28.91、28.75、28.60、28.46，可求得与之对应的 $Q_m$ 分别为 251.5、252.9、254.3、255.5m³/s。由此可得 $Q_m\sim t$ 关系曲线。在同一坐标纸上，绘制 $Q_m\sim\tau$ 和 $Q_m\sim t$ 曲线，两者的交点就是所求的$Q_m$，即 $Q_m$=259.6m³/s，$\tau$=28.01h。$t_c$=21.2h

小于 $\tau$,与假设相符。

4.1.2　matlab 求解

设 $t \geq t_c$,建立并运行 function[Qm],在指令窗口中输入:f1(65,0.7,0.004,45,2.3,0.7,230)

求得 $Q_m$=259.1450m$^3$/s,$t$=28.0599h。$t_c$=21.1911h,小于 $t$,可以选用。

### 4.2　算例 2

设某流域特征参数如表 2,求该流域百年一遇设计洪峰流量。

表 2　流域特征参数

Table 2 The characteristic parameters of the watershed

| $F$/km$^2$ | $L$/km | $J$ | $m$ | $n$ | $\mu$/mm.h$^{-1}$ | $S_p$/mm.h$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 50 | 0.005 | 1 | 0.7 | 2 | 175.4 |

4.2.1　迭代法求解

由公式 $Q_{m0}=A^{4/(4-n)}$,选迭代初值为 1 156.6m$^3$/s,迭代过程如表 3。

表 3　迭代法计算过程

Table 3 The calculation process of the iteration method

| 迭代次序 | $Q_m$初值 | 迭代值 |
|---|---|---|
| 1 | 1156.6 | 1073.2 |
| 2 | 1073.2 | 1058.1 |
| 3 | 1058.1 | 1055.3 |
| 4 | 1055.3 | 1054.8 |
| 5 | 1054.8 | 1054.7 |
| 6 | 1054.7 | 1054.7 |

可求得 $Q_m$=1054.7m$^3$/s,$t$=14.3h,$t_c$=106.8h 大于 $t$。与假设相符,可以选用。

4.2.2　matlab 求解

设 $t \geq t_c$,建立并运行 function [Qm],在指令窗口中输入:f1(175.4,1,0.005,50,2,0.7,150)

求得 $Q_m$=1623.6141m$^3$/s,$t$=12.8057h。$t_c$=106.8425h,大于 $t$。与假设相悖,不可选用。建立并运行 function [Qm,A,B,Qm0,t],在指令窗口中输入:

F2(175.4,1,0.005,50,2,0.7,150)

求得 $Q_m$=1054.7498m$^3$/s,$t$=14.2639h。$t_c$=106.8425h,大于 $t$。与假设相符,可以选用。

## 5　结语

针对《水利水电工程设计洪水计算规范》在推求小流域洪水时采用的推理公式,本文提出了以图解法及牛顿迭代法为基础,采用 matlab 软件在各种汇流类型下求解推理公式的洪峰流量 $Q_m$ 及汇流时间 $\tau$。实例分析计算表明,该方法对全面产流和部分产流均适用,不仅避免了传统图解法计算繁琐、手工绘图不准确的缺点;克服了迭代法求解部分汇流时计算不适用以及迭代次数较多、收敛速度慢、计算量大等缺点。而且计算速度快、精度高,而且简便、实用、易操作,便于推广使用。

参考文献:

[1] 陈家琦, 张恭肃. 小流域暴雨洪水计算问题[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983. (CHEN Jiaqi, ZHANG Gongsu. Heavy Rain and Flood Calculation of Small Basins [M]. Beijing: Water Resources and Electric Power Press, 1983. (in Chinese))

[2] 徐德龙, 肖华. 小流域设计洪水推理公式计算方法探讨 [J]. 人民长江, 2000, 31(7): 13-14. (XU Delong, XIAO Hua. Discussion of design flood calculation of small basins [J]. Yangtze River, 2000, 31 (7): 13-14. (in Chinese))

[3] 邱林, 孙元元, 周生通. 一种基于 VB 求解小流域设计洪峰流量的图解方法 [J]. 水文, 2012, (1).(QIU Lin, SUN Yuanyuan, ZHOU Shengtong. A method for designed peak flood calculation of small basins based on VB graphical methods [J]. Journal of China Hydrology, 2012, 32(1). (in Chinese))

[4] 李清善, 宋士仓. 数值方法[M]. 郑州:郑州大学出版社, 2007:164-166. (LI Qingshan, SONG Shicang. [M]. Numeric Methods [M]. Zhengzhou: Zhengzhou University Press,2007:164-166. (in Chinese))

[5] 周学国, 滕凯, 邹伟. 小流域设计洪水计算方法的简化 [J]. 东北水利水电, 2001, 19 (7).(ZHOU Xueguo, TENG Kai, ZOU Wei. The simplified method for small watershed design calculation [J]. Water Resources & Hydropower of Northeast China, 2001, 19(7).(in Chinese))

## Application of Matlab in Rational Formula for Watersheds

TIAN Jinghuan, LIANG Wentao

(*North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou* 450011, *China*)

**Abstract:** As for the rational formula listed in Regulation for Calculating Designed Flood Water Resources and Hydropower Projects for deriving small watershed flood, we proposed to derive the peak discharge and flow concentration time of the rational with Matlab software in the condition of various kinds of flow concentration. The method is simple, practical, and easy to operate with advantages of high calculation speed and precision.

**Key words:** rational formula; graphical method; Newton iteration method; Matlab